Tentamen Talen en Automaten

28 juni 2004, 14.00 –17.00 uur, Examenhal

Schrijf met blauwe of zwarte pen; *niet* met potlood en *niet* met rode pen. Voorzie alle bladen van je naam. Nummer de bladen en vermeld op het eerste blad het totale aantal.

Werk netjes. Formuleer je antwoorden zo compleet en tevens zo beknopt mogelijk. Je mag — tenzij expliciet anders aangegeven staat — direkt een beroep doen op (1) de stellingen uit het cursusmateriaal (*mits je ze goed formuleert*), (2) indien van toepassing: een (al dan niet bewezen) resultaat uit een eerder onderdeel van de opgave in kwestie.

Advies. Lees het geheel van de opgaven eerst rustig door en verdeel de beschikbare tijd met beleid.

Opgave 1. Laat het alfabet Σ uit de cijfers van het decimale stelsel bestaan:

$$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Definiëer: de taal L bestaat uit alle niet-lege strings $w \in \Sigma^*$ met de volgende eigenschap: het laatste cijfer van w komt ook al eerder voor in w (en dus $|w| \geq 2$).

(i) Construeer een NFA voor L.

(ii) Construeer een reguliere expressie voor L.

(iii) Beschouw een willekeurige reguliere expressie R voor de beschrijving van een taal over Σ. Bewijs (met inductie naar de opbouw van R): als R geen voorkomen van de operator * bevat, dan is de taal $L(R)$ eindig.

Opgave 2.

(i) Zij A een ϵ-NFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Bij elke $q \in Q$ hoort een deelverzameling $\mathsf{ECLOSE}(q)$ van Q, de zgn. ϵ-afsluiting (ϵ-*closure*) van q. Karakteriseer deze verzameling op twee manieren:

(a) aanschouwelijk, onder verwijzing naar paden in het transitiediagram van A,

(b) formeel wiskundig, en wel inductief.

(ii) Zij A een DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

(a) Recapituleer de recursieve definitie van de functie $\hat{\delta}$ ("delta-dakje").

(b) Veronderstel dat Σ een speciaal symbool a bevat met de eigenschap dat $\delta(q, a) = q$ voor elke $q \in Q$.

(b1) Bewijs inductief dat dan $\hat{\delta}(q, a^n) = q$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (voor elke willekeurige $q \in Q$).

(b2) Wat volgt hieruit voor de taal $L(a^*)$ ten aanzien van de taal $L(A)$?

Opgave 3.

(i) Zijn A een DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Definiëer de DFA A' door: $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$. Toon aan: $L(A')$ is gelijk aan het complement $\Sigma^* - L(A)$ van $L(A)$.

(ii) Zij nu A een NFA, $Q = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Definiëer de NFA A' door: $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$ (in dezelfde stijl als boven dus). Geldt nu ook gegarandeerd dat $L(A')$ het complement van $L(A)$ is? Zo ja, geef een algemeen bewijs. Zo niet, geef een tegenvoorbeeld.

(iii) Toon aan dat het volgende probleem beslisbaar is (voor DFA's met eenzelfde invoeralfabet). Parameter: Een DFA A_1 en een DFA A_2. Vraag: $L(A_1) \cap L(A_2) = \emptyset$?

Opgave 4. Zij Σ het alfabet $\{a, b, c, d\}$. Definiëer de talen L_1 en L_2 over Σ door:

$$L_1 = \{a^m b^m c^n d^n \mid m, n \in \mathbb{N}\},$$
$$L_2 = \{a^m b^n c^n d^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

(i) Construeer een CFG voor L_1.

(ii) Zij G een willekeurige CFG met Σ als alfabet van terminals; noteer: $G = (V, \Sigma, P, S)$. Zij A een nieuwe nonterminal. Beschouw de volgende grammatica G':

$$G' = (V \cup \{A\}, \Sigma, P \cup \{A \to cAd, A \to S\}, A)$$

Beschrijf helder (en beargumenteer kort) hoe de taal $L(G')$ met de taal $L(G)$ samenhangt.

(iii) Construeer een CFG voor L_2.

(iv) Beargumenteer dat er ook een PDA voor L_2 is.

(v) Toon aan dat de taal L_1 niet regulier is. Doe dit met behulp van het pomplemma voor reguliere talen.

(vi) (a) Bepaal de doorsnede van L_1 en L_2.

(b) Met behulp van het pomplemma voor contextvrije talen kan bewezen worden dat deze doorsnede geen contextvrije taal is. Dat bewijs wordt hier niet gevraagd. Wel wordt hier gevraagd: de formulering van het pomplemma voor contextvrije talen.

Opgave 5. Zij P een PDA, $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$.

(i) Recapituleer de definities van $N(P)$ en $L(P)$.

(ii) Uit de theorie is bekend dat P om te zetten is in een PDA P' met de eigenschap dat $N(P') = L(P)$. Het idee is, ruwweg gezegd, dat P' in eerste instantie net als P werkt op een invoer en dat als P na verwerking hiervan in een toestand $q \in F$ gekomen is, nu nog extra acties plaatsvinden, en wel om de stack helemaal leeg te maken. Beschrijf het hoe en waarom van de noodzakelijke bijkomende details van de uitwerking (plus verfijning) van dit idee.

Opgave 6.

(i) Zij A een DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Laat in detail zien hoe A te transformeren is in een TM M met de volgende eigenschappen: (1) $L(M) = L(A)$ en (2) M termineert op elke invoer.

(ii) Bewijs dat elke reguliere taal recursief is.

(iii) Veronderstel: L_1 en L_2 zijn talen over het alfabet Σ. Bewijs de volgende beweringen (a) en (b) aangaande de concatenatie L_1L_2 van L_1 en L_2. Hierbij mag je eventueel gebruikmaken van de these van Church-Turing. (Geef dan wel duidelijk de rol hiervan aan.)

(a) Als L_1 en L_2 recursief zijn, dan is L_1L_2 ook recursief.

(b) Als L_1 en L_2 recursief opsombaar zijn, dan is L_1L_2 ook recursief opsombaar.